|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Домашнее задание № 1 | | |
| по дисциплине «Методы оптимизации» | | |
| **Функционал. Вариация функционала.** **Простейшая задача вариационного исчисления** | | |
|  | | |
|  | Бригада 3 | ПМ-23 буров евгений |
|  | ПМ-23 Нос алексей |
|  | ПМ-23 румянцев артём |
|  | ПМ-23 рыбин кирилл |
|  | ПМ-23 Костовский Владимир |
|  | ПМ-23 якутин алексей |
| Преподаватель | тракимус юрий викторович |
|  |  |
| Новосибирск, 2025 | | |

**ФУНКЦИОНАЛ. БЛИЗОСТЬ КРИВЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА*.***

***Установить порядок близости кривых.***

*Проверка на близость 0-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, и близки в смысле близости 0-го порядка.

*Проверка на близость 1-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, и близки в смысле близости 1-го порядка.

*Проверка на близость 2-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, близости 2-го порядка нет.

Ответ: первый

1. , где достаточно велико, и на .

*Проверка на близость 0-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, и близки в смысле близости 0-го порядка.

*Проверка на близость 1-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, и близки в смысле близости 1-го порядка.

*Проверка на близость k-го порядка:*

значит, на заданном отрезке и близки в смысле близости k-го порядка.

Ответ: близость в смысле любого порядка.

*Проверка на близость 0-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, и и близки в смысле близости 0-го порядка.

*Проверка на близость 1-го порядка:*

На заданном отрезке [0, при достаточно больших n , значит, и близки в смысле близости 1-го порядка.

*Проверка на близость k-го порядка:*

значит, на заданном отрезке и близки в смысле близости k-го порядка.

Ответ: близость в смысле любого порядка.

***Найти расстояния между кривыми на указанных интервалах.***

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

Ответ:

На границах

Раскроем модуль:

.

Ответ:

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

Ответ:

***Найти расстояние между кривыми на заданном интервале.***

1. *на*

Найдём :

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

Найдем , т. к. первый максимум вычислили в прошлой задаче:

На границах = равна:

Раскроем модуль:

Производная не обращается в ноль на интервале, поэтому экстремумов нет.

Ответ:

***Найти расстояние между кривыми на заданном интервале.***

1. *на* .

Найдём :

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

*,* не принадлежит отрезку

Найдем:

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

*,* не принадлежит отрезку

Найдем:

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

*,*

Ответ:

***Найти расстояние между кривыми на заданном интервале.***

1. *на* .

Найдём :

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

Найдем:

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

Производная не обращается в ноль на интервале, поэтому экстремумов нет.

Найдем:

На границах = равна:

Так как функция на отрезке неотрицательная, то можем убрать модуль и брать производную.

Производная не обращается в ноль на интервале, поэтому экстремумов нет.

При дальнейшем интегрировании функция не будет меняться, поэтому растояния начиная с по будут одинаковыми.

Ответ:

***Исследовать на непрерывность следующие функционалы в окрестности прямой y = 0 : а) в ее сильной окрестности; б) в ее слабой окрестности*.**

2. Зададим и выберем кривые сравнения , тогда

.

Итак, с одной стороны, кривые в смысле близости нулевого порядка стремятся к : , но в то же время . Следовательно, функционал разрывный на прямой в ее сильной окрестности.

1. Рассмотрим любую последовательность функций , стремящуюся к при в ее слабой окрестности. Это означает, что Отсюда следует, что , значит, и Следовательно, функционал непрерывен на в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

1. Зададим и выберем кривые сравнения , тогда

.

Итак, с одной стороны, кривые в смысле близости нулевого порядка стремятся к : , но в то же время . Следовательно, функционал разрывный на прямой в ее сильной окрестности.

1. Рассмотрим любую последовательность функций , стремящуюся к при в ее слабой окрестности. Это означает, что Отсюда следует, что , значит, и Следовательно, функционал непрерывен на в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

1. Зададим и выберем кривые сравнения , тогда

Итак, с одной стороны, кривые в смысле близости нулевого порядка стремятся к : , но в то же время . Следовательно, функционал разрывный на прямой в ее сильной окрестности.

1. Рассмотрим любую последовательность функций , стремящуюся к при в ее слабой окрестности. Это означает, что Отсюда следует, что , ,, значит, и Следовательно, функционал непрерывен на в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный*.*

1. Зададим и выберем кривые сравнения , тогда

Итак, с одной стороны, кривые в смысле близости нулевого порядка стремятся к : , но в то же время . Следовательно, функционал разрывный на прямой в ее сильной окрестности.

1. Рассмотрим любую последовательность функций , стремящуюся к при в ее слабой окрестности. Это означает, что Отсюда следует, что , значит, и

Следовательно, функционал непрерывен на в ее слабой окрестности.

Ответ: а) разрывный; б) непрерывный.

**ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА.  
НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА.**

1. Найти , если , ,



Ответ:.

***Найти вариацию функционалов.***

Согласно второму определению вариации:



Ответ:.

Согласно второму определению вариации:



Ответ: .

Согласно второму определению вариации:



Ответ: .

Согласно второму определению вариации:



Ответ: .

Согласно второму определению вариации:



Ответ: .

**ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.   
УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА.**

***Найти экстремали функционалов.***

Уравнение Эйлера:

, ,

Подстановка:

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение:

Пусть

Ответ:



Уравнение Эйлера (4 частный случай):

Подстановка:

Ответ:

Уравнение Эйлера (4 частный случай):

, откуда

Подстановка:

Ответ:

Уравнение Эйлера (4 частный случай):

Подстановка:

Ответ:

***Найти экстремали в вариационных задачах.***

Уравнение Эйлера:

Подставим :

Учёт граничных условий:

Искомая экстремаль:

Ответ:

Уравнение Эйлера (5 частный случай):

Подстановка:

Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Характеристическое уравнение:

Общее решение:

Подставим граничные условия:

Ответ:

Уравнение Эйлера (5 частный случай):

Подстановка:

Сделаем замену , получим:

Подставим граничные условия:

Ответ:

Уравнение Эйлера примет вид:

Решим ДУ второго порядка:

Общее решение однородного уравнения :

Будем искать частное решение в виде

Производные частного решения:

Подставим в исходное уравнение:

Отсюда .

Частное решение уравнения примет вид

Общее решение исходного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений:

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений:

Отсюда произвольная.

Искомая экстремаль:

Ответ:

Уравнение Эйлера примет вид:

, при этом – его частное решение.

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

Общее решение исходного уравнения:

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений:

Отсюда .

Искомая экстремаль:

Ответ:

Уравнение Эйлера примет вид:

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений:

Отсюда .

Искомая экстремаль:

Ответ:

Уравнение Эйлера примет вид:

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений:

Отсюда .

Искомая экстремаль:

Ответ:

Уравнение Эйлера примет вид:

Заметим, что левая часть представляет собой дифференциал по от , значит

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений:

Отсюда .

Искомая экстремаль:

Ответ:

***Найти экстремали в вариационных задачах, используя частные  
случаи интегрируемости уравнения Эйлера.***

Уравнение Эйлера в этом частном случае примет вид:

Интеграл не зависит от пути интегрирования; вариационная задача не имеет смысла.

Ответ:

Уравнение Эйлера примет вид:

Уравнение Эйлера зависит только от .

Граничное условие удовлетворено. удовлетворено тогда и только тогда, когда .

Ответ:

Здесь Функция не зависит от х, значит уравнение Эйлера можно найти по формуле

где С – произвольная константа. Тогда функция Эйлера имеет вид:

*, ,*

Общее решение этого уравнения:

Найдем константы исходя из граничных условий: и

При :

При,

Подставив найденные константы в общее решение, получим экстремаль

Ответ:

Здесь Функция не зависит от х, значит уравнение Эйлера можно найти по формуле

,

где С – произвольная константа. Тогда функция Эйлера имеет вид:

*, ,*

Общее решение этого уравнения:

Найдем константы исходя из граничных условий: и

При :

При,

Мы получили, что , однако про константу нам ничего не известно. Подставив в общее решение, получим:

Таким образом, константа может принимать любые значения, и экстремали задаются уравнением выше при

Ответ**:**

Здесь Функция не зависит от y, значит уравнение Эйлера можно найти по формуле

где С – произвольная константа. Тогда функция Эйлера имеет вид:

Общее решение этого уравнения: , где и – произвольные константы

Найдем константы исходя из граничных условий: и

При :

При,

Подставив найденные константы в общее решение, получим экстремаль

Ответ**:**

Здесь Функция не зависит от х, значит уравнение Эйлера можно найти по формуле

,

где С – произвольная константа. Тогда функция Эйлера имеет вид:

Общее решение этого уравнения можно представить в в иде:

Найдем константы исходя из граничных условий: и

При :

При,

Подставив найденные константы в общее решение, получим экстремаль

Ответ**:**

Здесь Функция не зависит от х, значит уравнение Эйлера можно найти по формуле

,

где С – произвольная константа. Тогда функция Эйлера имеет вид:

Общее решение этого уравнения:

Найдем константы исходя из граничных условий: и

При :

При, ->

Подставив найденные константы в общее решение, получим экстремаль =

Ответ**:**

Здесь Функция не зависит от х, значит уравнение Эйлера можно найти по формуле

,

где С – произвольная константа. Тогда функция Эйлера имеет вид:

Решение данного уравнения нельзя выразить в элементарных функциях. Это означает, что невозможно получить явное выражение для функции у(х), а значит, уравнение не имеет экстремалей.

Ответ**:**  не имеет экстремалей.

В этом уравнении не даны граничичные условия, а значит мы можем найти только общее решение.

Здесь

Уравнение Эйлера имеет вид:

Решением данного уравнения будет две функции . Так как решения данного уравнения являются комплексными, то данная вариационная задача не имеет вещественных экстремалей

Ответ**:** нет вещественных экстремалей